LINEARE ALGEBRA

ÜBUNGSBLATT 1

1. Auf der Menge $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definieren wir die Operation

$$+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \text{ durch } (x, x') + (y, y') = (x + x', y + y').$$

Man zeige, dass $(\mathbb{R}^2, +)$ eine abelsche Gruppe ist, und die Teilmenge

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$$

eine Untergruppe bildet. Veralgemeinerung für $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$.

2. Auf der Menge $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ definieren wir eine Operation wie folghlich

$$* : S \times S \to S,\ (x, x') * (y, y') = (xx' - yy', xy' + x'y).$$

Man zeige, dass $(S, *)$ eine abelsche Gruppe ist.

3. Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe, mit dem Neutralelement 1. Gilt $x^2 = 1$ für alle $x \in G$, so ist G abelsch.

4. Für jeden Gruppenhomomorphismus $f : G \to H$, bezeichnen wir $\operatorname{Ker} f = \{x \in G \mid f(x) = 1\}$ und $\operatorname{Im} f = \{y \in H \mid \exists x \in G \text{ so dass } f(x) = y\}$. Man zeige, dass $\operatorname{Ker} f \leq G$ und $\operatorname{Im} f \leq H$.

5. Ist $f : G \to H$ ein Gruppenisomorphismus, so ist $f^{-1} : H \to G$ auch.

6. Man zeige dass die Gruppen $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ isomorph sind, wobei $\mathbb{R}_+^* = (0, +\infty)$.

7. Sei A eine Menge. Man zeige, dass $(\mathcal{P}(A), \Delta, \cap)$ ein Ring ist, wobei $\mathcal{P}(A)$ die Potenzmenge der Menge A bezeichnet, Δ und $\cap$ die symmetrische Differenz bzw. die Durchschnitt zweier Menge sind.

8. a) Ist $(M, \cdot)$ ein Monoid, so ist

$$U(M) = \{x \in M \mid x \text{ ist invertierbar}\}$$

ein Stabilerteil von M, die sogar eine Gruppe ist bezüglich die induzierte Operation.

b) Man prüfe (ob es nötig ist), dass die Strukturen $(\mathbb{Z}, \cdot)$, $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \cdot)$ und $(A^A, \circ)$ Monoide sind, wobei $A^A = \{f : A \to A \mid f \text{ eine Abbildung ist}\}$. Ferner bestimme man, $U(\mathbb{Z})$, $U(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ und $U(A^A)$.

"Babeş-Bolyai" Universität, Fakultät für Mathematik und Informatik, RO-400084, Cluj-Napoca, Rumänien

E-mail address, George Ciprian Modoi: `cmodoi@math.ubbcluj.ro`